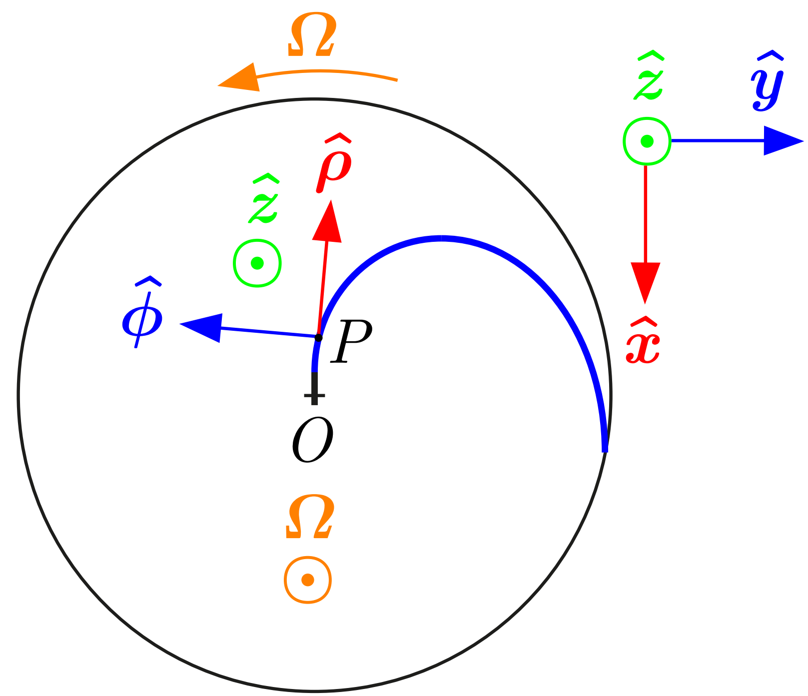
Applications - Chapitre 11

Dynamique terrestre, pendule de Foucault et système de points matériels

EPFL

- Une buse est fixée au centre O d'un disque. Le disque est en rotation à vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\hat{\boldsymbol{z}} = \mathbf{cste}$ dans le sens trigonométrique par rapport au sol.
- Un jet d'eau sort horizontalement et radialement de la buse. On modélise le mouvement d'une goutte d'eau considérée comme un point matériel P de masse m.
- La trajectoire du jet d'eau est la courbe bleue fixe dans le référentiel accéléré du disque.



1. Référentiel absolu : sol
   repère cartésien $\left(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}\right)$

2. Référentiel relatif : disque
   repère cylindrique $\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{z}}\right)$

- Grandeurs cinématiques relatives :

  1. Position relative : (A.11.1)

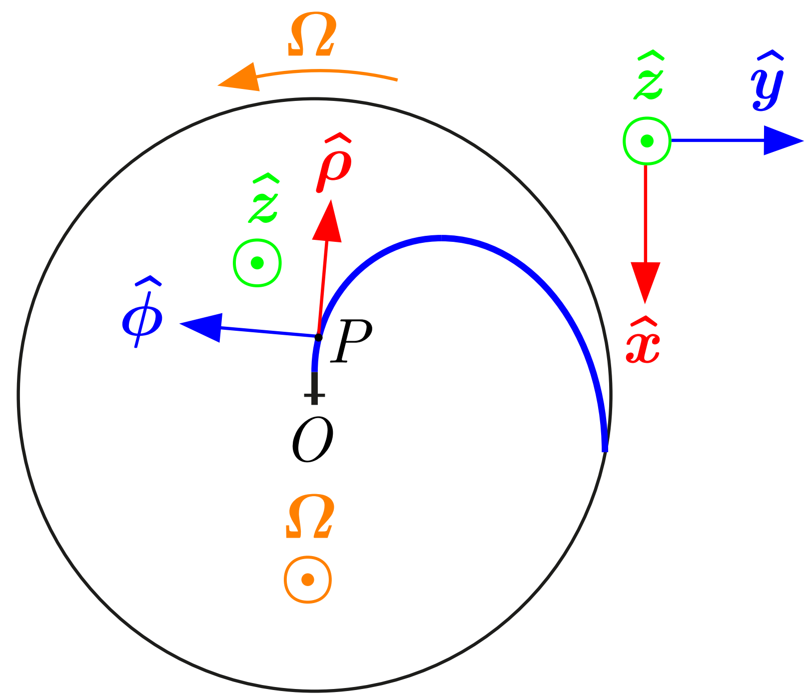
  $$\boldsymbol{r}_r\left(P\right) = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

  2. Vitesse relative : (A.11.2)

  $$\boldsymbol{v}_r\left(P\right) = \dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dot{z}\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

  3. Accélération relative :

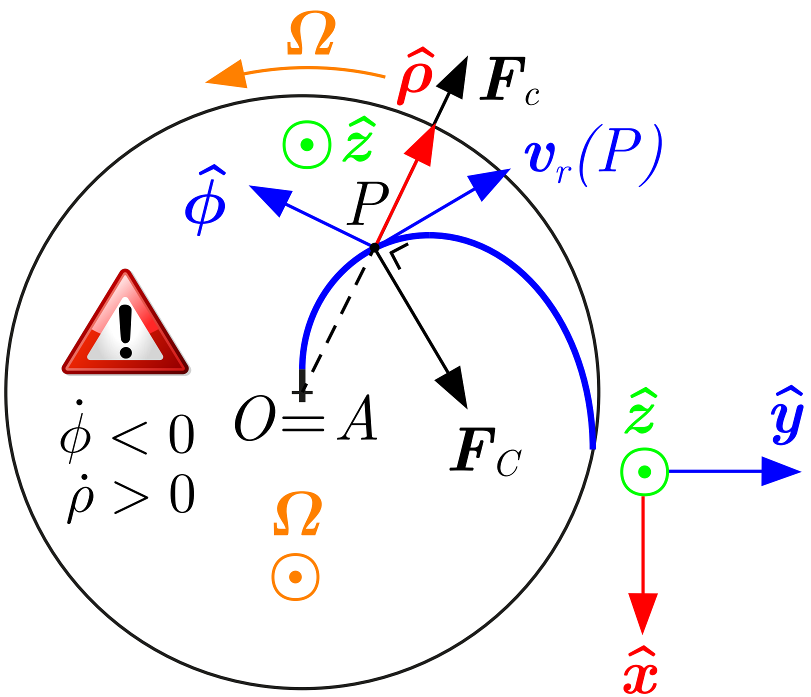
  $$\boldsymbol{a}_r\left(P\right) = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\rho\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \ddot{z}\,\hat{\boldsymbol{z}} \qquad (A.11.3)$$



- Force extérieure :

  1. Poids :

  $$\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g} = -\,mg\,\hat{\boldsymbol{z}} \qquad (A.11.4)$$



- Grandeurs cinématiques relatives :

$$\boldsymbol{r}_r\,(P) = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{v}_r\,(P) = \dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dot{z}\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

- Forces d'inertie : $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{0}$; $\boldsymbol{a}_a\,(A) = \boldsymbol{0}$

1. Force centrifuge :

$$\boldsymbol{F}_c = -\,m\,\boldsymbol{\Omega} \times \Big(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_r\,(P)\Big) = -\,m\,\Omega^2\,\hat{\boldsymbol{z}} \times \Big(\hat{\boldsymbol{z}} \times (\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cancel{z\,\hat{\boldsymbol{z}}})\Big)$$

$$= m\,\rho\,\Omega^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad (A.11.5)$$

2. Force de Coriolis :

$$\boldsymbol{F}_C = -\,2\,m\,\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_r\,(P) = -\,2\,m\,\Omega\,\hat{\boldsymbol{z}} \times \Big(\dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + \cancel{\dot{z}\,\hat{\boldsymbol{z}}}\Big)$$

$$= -\,2\,m\,\dot{\rho}\,\Omega\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + 2\,m\,\rho\,\dot{\phi}\,\Omega\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad (A.11.6)$$

- Loi du mouvement relatif :

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{in}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_C = m\,\boldsymbol{a}_r\,(P) \qquad (A.11.7)$$

- Equations du mouvement relatif :

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\rho}} \;:\quad m\,\rho\,\Omega^2 + 2\,m\,\rho\,\dot{\phi}\,\Omega = m\left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2\right) \qquad (A.11.8)$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}} \;:\quad -\,2\,m\,\dot{\rho}\,\Omega = m\left(\rho\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\phi}\right) \qquad (A.11.9)$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{z}} \;:\quad -\,mg = m\,\ddot{z} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{z} = -\,g \qquad (A.11.10)$$

- Mouvement radial : $(A.11.8) \quad \Rightarrow$

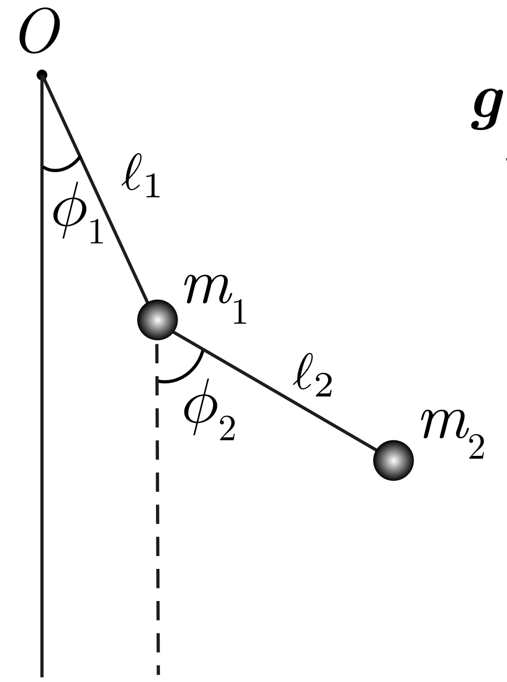
$$\ddot{\rho} - \left(\Omega + \dot{\phi}\right)^2 \rho = 0 \qquad (A.11.11)$$

- Mouvement azimutal : $(A.11.9) \quad \Rightarrow$

$$\rho\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{\rho}\left(\Omega + \dot{\phi}\right) = 0 \qquad (A.11.12)$$

A.11.2 Pendule double

- On considère un pendule double constitué de deux bras de masses négligeables attachés l'un à l'autre.
- Le premier bras de longueur ℓ_1 est attaché à l'origine au point O. Un point matériel de masse m_1 est fixé à l'autre extrémité. L'angle d'oscillation dans le plan vertical est ϕ_1.
- Le deuxième bras de longueur ℓ_2 est attaché au point matériel de masse m_1. Un point matériel de masse m_2 est fixé à l'autre extrémité. L'angle d'oscillation dans le plan vertical est ϕ_2.



- Vecteurs positions :

$$\boldsymbol{r}_1 = \ell_1\,\hat{\boldsymbol{\rho}}_1$$

$$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \ell_2\,\hat{\boldsymbol{\rho}}_2$$

- Changement de base : rotation d'angle $\phi_2 - \phi_1$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_2 = \cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}_1 + \sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_2 = -\sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}_1 + \cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$

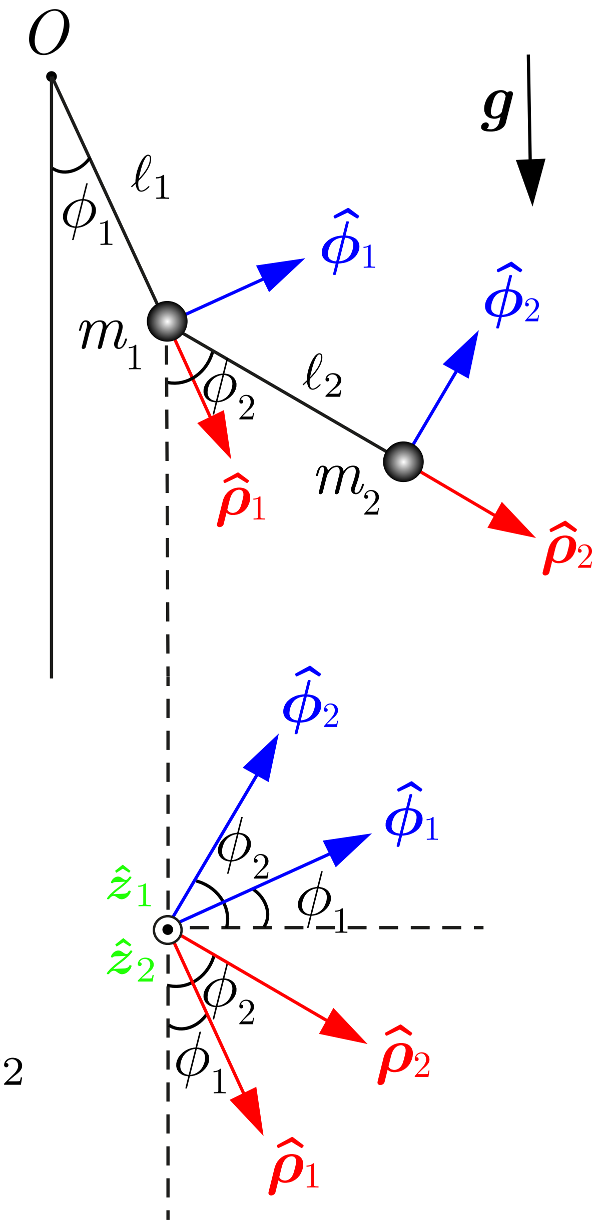
- Vecteurs vitesses : formules de Poisson

$$\boldsymbol{v}_1 = \dot{\boldsymbol{r}}_1 = \ell_1\,\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}}_1 = \ell_1\,\dot{\phi}_1\,\hat{\boldsymbol{z}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 = \ell_1\,\dot{\phi}_1\,\hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$

$$\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = \dot{\boldsymbol{r}}_2 - \dot{\boldsymbol{r}}_1 = \ell_2\,\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}}_2 = \ell_2\,\dot{\phi}_2\,\hat{\boldsymbol{z}}_2 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_2 = \ell_2\,\dot{\phi}_2\,\hat{\boldsymbol{\phi}}_2$$

$$= \ell_2\,\dot{\phi}_2\left(-\sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}_1 + \cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}_1\right)$$

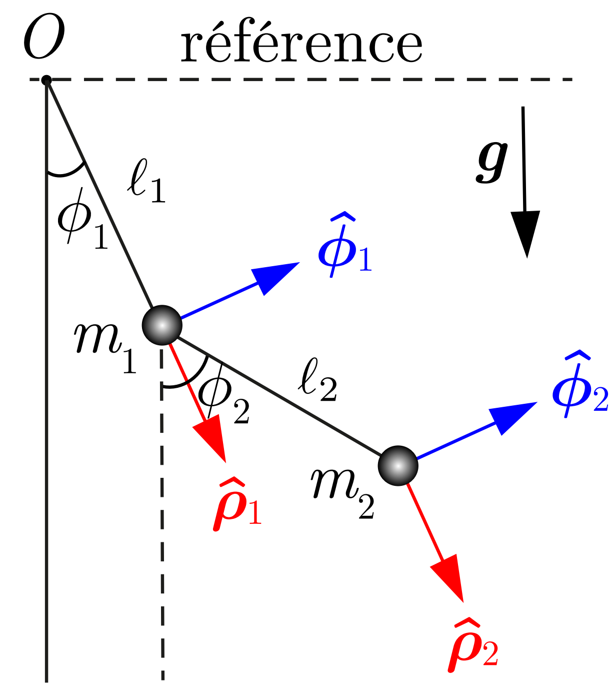
$$\boldsymbol{v}_2 = -\ell_2\,\dot{\phi}_2\,\sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}_1 + \left(\ell_1\,\dot{\phi}_1 + \ell_2\,\dot{\phi}_2\,\cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$



- Vecteurs vitesses :

$$\boldsymbol{v}_1 = \ell_1\,\dot{\phi}_1\,\hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$

$$\boldsymbol{v}_2 = -\,\ell_2\,\dot{\phi}_2\,\sin\left(\phi_2 - \phi_1\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}_1 + \Big(\ell_1\,\dot{\phi}_1 + \ell_2\,\dot{\phi}_2\,\cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)\Big)\,\hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$



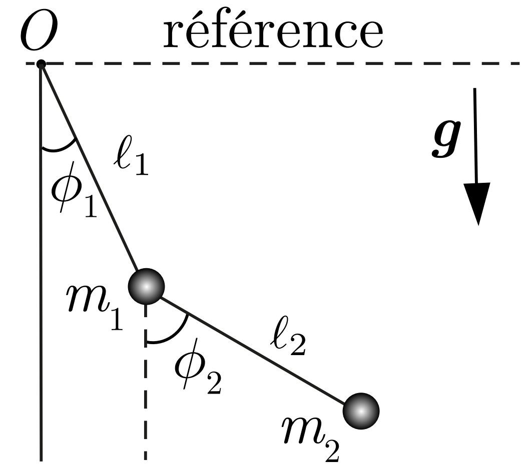
- Vitesses quadratiques :

$$v_1^2 = \ell_1^2\,\dot{\phi}_1^2 \qquad (A.11.13)$$

$$v_2^2 = \ell_2^2\,\dot{\phi}_2^2\,\sin^2\left(\phi_2 - \phi_1\right) + \ell_1^2\,\dot{\phi}_1^2 + \ell_2^2\,\dot{\phi}_2^2\,\cos^2\left(\phi_2 - \phi_1\right) + 2\,\ell_1\,\ell_2\,\dot{\phi}_1\,\dot{\phi}_2\,\cos^2\left(\phi_2 - \phi_1\right)$$

$$= \ell_1^2\,\dot{\phi}_1^2 + \ell_2^2\,\dot{\phi}_2^2 + 2\,\ell_1\,\ell_2\,\dot{\phi}_1\,\dot{\phi}_2\,\cos\left(\phi_2 - \phi_1\right) \qquad (A.11.14)$$

- On choisit comme référence d'énergie potentielle gravitationnelle la droite horizontale qui passe par le point O.



- Energie cinétique :

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\, m_1\, v_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, v_2^2$$

$$= \frac{1}{2}\, m_1\, \ell_1^2\, \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 \left(\ell_1^2\, \dot{\phi}_1^2 + \ell_2^2\, \dot{\phi}_2^2 \right)$$

$$+ m_2\, \ell_1\, \ell_2\, \dot{\phi}_1\, \dot{\phi}_2\, \cos\left(\phi_2 - \phi_1\right) \qquad (A.11.15)$$

- Energie potentielle :

$$V = V_{g1} + V_{g2} = -\, m_1 g h_1 - m_2 g h_2$$

$$= -\, m_1 g\, \ell_1 \cos\phi_1 - m_2 g \left(\ell_1 \cos\phi_1 + \ell_2 \cos\phi_2\right) \qquad (A.11.16)$$

- Energie mécanique : $E = T + V$

$$E = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) \ell_1^2\, \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, \ell_2^2\, \dot{\phi}_2^2 + m_2\, \ell_1\, \ell_2\, \dot{\phi}_1\, \dot{\phi}_2\, \cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)$$

$$-\left(m_1 + m_2\right) g\, \ell_1\, \cos\phi_1 - m_2\, g\, \ell_2\, \cos\phi_2 \qquad (A.11.17)$$

- Conservation de l'énergie mécanique : $\dot{E} = 0$

$$(m_1 + m_2)\,\ell_1^2\,\dot{\phi}_1\,\ddot{\phi}_1 + m_2\,\ell_2^2\,\dot{\phi}_2\,\ddot{\phi}_2 + m_2\,\ell_1\,\ell_2\left(\dot{\phi}_1\,\ddot{\phi}_2 + \ddot{\phi}_1\,\dot{\phi}_2\right)\cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)$$
$$+ m_2\,\ell_1\,\ell_2\left(\dot{\phi}_1^2\,\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1\,\dot{\phi}_2^2\right)\sin\left(\phi_2 - \phi_1\right) + (m_1 + m_2)\,g\,\ell_1\,\dot{\phi}_1\sin\phi_1$$
$$+ m_2\,g\,\ell_2\,\dot{\phi}_2\,\sin\phi_2 = 0 \qquad (A.11.18)$$

- Factorisation : vitesses angulaires $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$: 2 degrés de liberté

$$\Big[(m_1 + m_2)\,\ell_1^2\,\ddot{\phi}_1 + m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\ddot{\phi}_2\cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)$$
$$- m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\dot{\phi}_2^2\sin\left(\phi_2 - \phi_1\right) + (m_1 + m_2)\,g\,\ell_1\sin\phi_1\Big]\,\dot{\phi}_1$$
$$+ \Big[m_2\,\ell_2^2\,\ddot{\phi}_2 + m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\ddot{\phi}_1\cos\left(\phi_2 - \phi_1\right)$$
$$+ m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\dot{\phi}_1^2\sin\left(\phi_2 - \phi_1\right) + m_2\,g\,\ell_2\sin\phi_2\Big]\,\dot{\phi}_2 = 0 \qquad (A.11.19)$$

- Equations du mouvement : $(A.11.19)$ satisfaite pour tout $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$

$$\begin{aligned}&(m_1+m_2)\,\ell_1^2\,\ddot{\phi}_1+m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\ddot{\phi}_2\cos(\phi_2-\phi_1)\\&-m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\dot{\phi}_2^2\sin(\phi_2-\phi_1)+(m_1+m_2)\,g\,\ell_1\sin\phi_1=0\end{aligned}\tag{A.11.20}$$

$$\begin{aligned}&m_2\,\ell_2^2\,\ddot{\phi}_2+m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\ddot{\phi}_1\cos(\phi_2-\phi_1)\\&+m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\dot{\phi}_1^2\sin(\phi_2-\phi_1)+m_2\,g\,\ell_2\sin\phi_2=0\end{aligned}\tag{A.11.21}$$

- Dans le cas général, les équations du mouvement couplées $(A.11.20)$ et $(A.11.21)$ donnent lieu à un mouvement chaotique caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales.

- Dans la limite des mouvements lents avec de petits angles, on fait une approximation au $2^{\,\mathrm{e}}$ ordre en ϕ_1, ϕ_2, $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$ dans l'expression de l'énergie mécanique E. Ces équations décrivent alors deux oscillateurs harmoniques couplés.

- Limite des mouvements lents avec de petits angles :
  $2^{\,\mathrm{e}}$ ordre en ϕ_1, ϕ_2, $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$ pour E

$$\cos\phi_1 \simeq 1 - \frac{1}{2}\,\phi_1^2 \qquad \text{et} \qquad \cos\phi_2 \simeq 1 - \frac{1}{2}\,\phi_2^2$$

$$\dot{\phi}_1\,\dot{\phi}_2\,\cos\left(\phi_2 - \phi_1\right) \simeq \dot{\phi}_1\,\dot{\phi}_2\left(1 - \frac{1}{2}\left(\phi_2 - \phi_1\right)^2\right) \simeq \dot{\phi}_1\,\dot{\phi}_2$$

- Energie mécanique : $(A.11.17) \;\Rightarrow\; 2^{\,\mathrm{e}}$ ordre en ϕ_1, ϕ_2, $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$

$$\begin{aligned} E = {} & \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\ell_1^2\,\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) g\,\ell_1\,\phi_1^2 \\ & + \frac{1}{2}\,m_2\,\ell_2^2\,\dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,g\,\ell_2\,\phi_2^2 \qquad (A.11.22) \\ & + m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\dot{\phi}_1\,\dot{\phi}_2 - \left(m_1 + m_2\right) g\,\ell_1 - m_2\,g\,\ell_2 \end{aligned}$$

- Conservation de l'énergie mécanique : $\dot{E} = 0$

$$\left[(m_1 + m_2)\,\ell_1^2\,\ddot{\phi}_1 + (m_1 + m_2)\,g\,\ell_1\,\phi_1 + m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\ddot{\phi}_2\right]\,\dot{\phi}_1$$

$$+\left[m_2\,\ell_2^2\,\ddot{\phi}_2 + m_2\,g\,\ell_2\,\phi_2 + m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\ddot{\phi}_1\right]\,\dot{\phi}_2 = 0 \qquad (A.11.23)$$

- Equations du mouvement : $(A.11.23)$ satisfaite pour tout $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$

$$(m_1 + m_2)\,\ell_1^2\,\ddot{\phi}_1 + (m_1 + m_2)\,g\,\ell_1\,\phi_1 + m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\ddot{\phi}_2 = 0 \qquad (A.11.24)$$

$$m_2\,\ell_2^2\,\ddot{\phi}_2 + m_2\,g\,\ell_2\,\phi_2 + m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\ddot{\phi}_1 = 0 \qquad (A.11.25)$$

- Equations du mouvement : $\ell = \ell_1 = \ell_2$ et $m = m_1 = m_2$

$$2\,m\,\ell^2\,\ddot{\phi}_1 + 2\,m\,g\,\ell\,\phi_1 + m\,\ell^2\,\ddot{\phi}_2 = 0 \qquad (A.11.26)$$

$$m\,\ell^2\,\ddot{\phi}_2 + m\,g\,\ell\,\phi_2 + m\,\ell^2\,\ddot{\phi}_1 = 0 \qquad (A.11.27)$$

- Equations du mouvement : divisée par $m\,\ell^2$

$$2\,\ddot{\phi}_1 + 2\,\frac{g}{\ell}\,\phi_1 + \ddot{\phi}_2 = 0 \tag{A.11.28}$$

$$\ddot{\phi}_2 + \frac{g}{\ell}\,\phi_2 + \ddot{\phi}_1 = 0 \tag{A.11.29}$$

- Système matriciel :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} + \frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.11.30}$$

- Système matriciel : forme condensée

$$A\,\ddot{\mathbf{\Phi}} + \frac{g}{\ell}\,B\,\mathbf{\Phi} = 0 \tag{A.11.31}$$

- Matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \qquad \ddot{\mathbf{\Phi}} = \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} \tag{A.11.32}$$

- Solutions réelles : mouvements harmoniques oscillatoires de pulsation ω

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \mathrm{Re}\left(e^{i(\omega t + \varphi)}\right) \begin{pmatrix} \phi_{1,0} \\ \phi_{2,0} \end{pmatrix} = \cos\left(\omega t + \varphi\right) \begin{pmatrix} \phi_{1,0} \\ \phi_{2,0} \end{pmatrix} \qquad (A.11.33)$$

- Dérivées temporelles secondes :

$$\ddot{\boldsymbol{\Phi}} = \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} = -\,\omega^2 \cos\left(\omega t + \varphi\right) \begin{pmatrix} \phi_{1,0} \\ \phi_{2,0} \end{pmatrix} = -\,\omega^2\, \boldsymbol{\Phi} \qquad (A.11.34)$$

- Système matriciel : forme condensée

$$C\left(\omega^2\right) \boldsymbol{\Phi} \equiv \left(\frac{g}{\ell}\, B - \,\omega^2\, A\right) \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0} \qquad (A.11.35)$$

- Matrice :

$$C\left(\omega^2\right) = \begin{pmatrix} 2\left(\dfrac{g}{\ell} - \,\omega^2\right) & -\,\omega^2 \\ -\,\omega^2 & \dfrac{g}{\ell} - \,\omega^2 \end{pmatrix} \qquad (A.11.36)$$

- Déterminant : $(A.11.37)$

$$\det\left(C\left(\omega^2\right)\right) = \begin{vmatrix} 2\left(\frac{g}{\ell} - \omega^2\right) & -\,\omega^2 \\ -\,\omega^2 & \frac{g}{\ell} - \omega^2 \end{vmatrix} = 2\left(\frac{g}{\ell} - \omega^2\right)^2 - \omega^4 = 0$$

- Valeurs propres : équation bicarrée

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{g}{\ell}\left(2 \pm \sqrt{2}\right) \qquad (A.11.38)$$

- Equations aux valeurs propres : forme condensée

$$C\left(\omega_{\pm}^2\right)\mathbf{\Phi}_{\pm} = 0 \qquad (A.11.39)$$

- Equations aux valeurs propres : système matriciel

$$\begin{pmatrix} 2\left(\frac{g}{\ell} - \omega_{\pm}^2\right) & -\,\omega_{\pm}^2 \\ -\,\omega_{\pm}^2 & \frac{g}{\ell} - \omega_{\pm}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\pm 1} \\ \phi_{\pm 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A.11.40)$$

- Valeurs propres :

$$\omega_{\pm}^{2} = \left(2 \pm \sqrt{2}\right) \frac{g}{\ell} \tag{A.11.41}$$

- Equations aux valeurs propres : système matriciel

$$\frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 2\left(-1 \mp \sqrt{2}\right) & -2 \mp \sqrt{2} \\ -2 \mp \sqrt{2} & -1 \mp \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\pm 1} \\ \phi_{\pm 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.11.42}$$

- Conditions :

$$\begin{aligned} -\left(2 \pm 2\sqrt{2}\right) \phi_{\pm 1} + \left(-2 \mp \sqrt{2}\right) \phi_{\pm 2} &= 0 \\ -\left(2 \pm \sqrt{2}\right) \phi_{\pm 1} + \left(-1 \mp \sqrt{2}\right) \phi_{\pm 2} &= 0 \end{aligned} \tag{A.11.43}$$

- Vecteurs propres : rapport des composantes

$$\frac{\phi_{\pm 1}}{\phi_{\pm 2}} = \frac{-2 \mp \sqrt{2}}{2 \pm 2\sqrt{2}} = \frac{-1 \mp \sqrt{2}}{2 \pm \sqrt{2}} = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{A.11.44}$$

- Vecteurs propres :

$$\boldsymbol{\Phi}_{+}(t) = \cos(\omega_{+}t + \varphi_{+}) \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{-}(t) = \cos(\omega_{-}t + \varphi_{-}) \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (A.11.45)$$

- Solution vectorielle : générale

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = c_{+}\,\boldsymbol{\Phi}_{+}(t) + c_{-}\,\boldsymbol{\Phi}_{-}(t) \qquad (A.11.46)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} = c_{+}\cos(\omega_{+}t + \varphi_{+})\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + c_{-}\cos(\omega_{-}t + \varphi_{-})\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Equations horaires : générales

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= -\sqrt{2}\,c_{+}\cos(\omega_{+}t + \varphi_{+}) + \sqrt{2}\,c_{-}\cos(\omega_{-}t + \varphi_{-}) \qquad (A.11.47) \\ \phi_2(t) &= 2\,c_{+}\cos(\omega_{+}t + \varphi_{+}) + 2\,c_{-}\cos(\omega_{-}t + \varphi_{-}) \end{aligned}$$

Les coefficients c_{+} et c_{-} sont déterminés par les conditions initiales.

- Equations de la vitesse : générales

$$\dot{\phi}_1(t) = \sqrt{2}\,c_+\omega_+\sin(\omega_+ t + \varphi_+) - \sqrt{2}\,c_-\omega_-\sin(\omega_- t + \varphi_-) \quad (A.11.48)$$
$$\dot{\phi}_2(t) = -2\,c_+\omega_+\sin(\omega_+ t + \varphi_+) - 2\,c_-\omega_-\sin(\omega_- t + \varphi_-)$$

- Conditions initiales : petites angles et vitesses angulaires nulles

$$\phi_1(0) = \phi_{1,0} \qquad \text{et} \qquad \phi_2(0) = \phi_{2,0} \quad (A.11.49)$$

$$\dot{\phi}_2(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \dot{\phi}_2(0) = 0 \quad (A.11.50)$$

- Angles de déphasage : nuls

$$\varphi_+ = \varphi_- = 0 \quad (A.11.51)$$

- Angles initiaux :

$$\phi_{1,0} = -\sqrt{2}\,c_+ + \sqrt{2}\,c_- \quad (A.11.52)$$
$$\phi_{2,0} = 2\,c_+ + 2\,c_-$$

- Coefficients :

$$c_+ = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{2}\,\phi_{1,0} + \phi_{2,0} \right)$$
$$c_- = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\,\phi_{1,0} + \phi_{2,0} \right) \qquad (A.11.54)$$

- Equations horaires :

$$\phi_1(t) = -\sqrt{2}\,c_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \sqrt{2}\,c_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \qquad (A.11.47)$$
$$\phi_2(t) = 2\,c_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + 2\,c_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)$$

- Equations horaires : $(A.11.55)$

$$\phi_1(t) = \frac{1}{4}\left(2\,\phi_{1,0} - \sqrt{2}\,\phi_{2,0}\right)\cos(\omega_+ t) + \frac{1}{4}\left(2\,\phi_{1,0} + \sqrt{2}\,\phi_{2,0}\right)\cos(\omega_- t)$$

$$\phi_2(t) = \frac{1}{2}\left(\phi_{2,0} - \sqrt{2}\,\phi_{1,0}\right)\cos(\omega_+ t) + \frac{1}{2}\left(\phi_{2,0} + \sqrt{2}\,\phi_{1,0}\right)\cos(\omega_- t)$$